



## ПЕДАГОГИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 202–207  
*Izvestiya of Saratov University. Philosophy. Psychology. Pedagogy*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 202–207  
<https://phpp.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1819-7671-2022-22-2-202-207>

Научная статья  
УДК 372.851

### Учить логике будущих учителей математики (часть III)

В. И. Игошин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Игошин Владимир Иванович, профессор, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, [igoshinvi@mail.ru](mailto:igoshinvi@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0909-0009>

**Аннотация.** Публикация представляет собой третью часть статьи автора под тем же названием, вышедшей в предыдущих номерах данного журнала. В ней обсуждается проблема формирования логических и логико-дидактических компетенций будущих учителей математики как на уровне бакалавриата, так и на уровне магистратуры. Логика рассматривается в трех аспектах – классическая аристотелевская логика, современная математическая логика и ее применение к аристотелевской логике, неклассические логики. Предлагается ряд мер, связанных с формированием системообразующего фактора во всей системе подготовки кадров. Обучение на уровне магистратуры должно отвечать принципу преемственности и стать естественным продолжением обучения на уровне бакалавриата. Такой подход позволит существенно повысить уровень логической, а вместе с ней и общей профессиональной компетентности учителей математики, выпускаемых педагогическими и классическими университетами. Такие учителя в своей профессиональной педагогической деятельности смогут применять логические знания и умения для воспитания на разных ступенях общего образования логически и математически грамотных учащихся, способных к дальнейшему саморазвитию и творческой реализации.

**Ключевые слова:** учитель математики, подготовка учителя математики, логическая компетентность будущих учителей математики, бакалавры и магистры педагогического образования, аристотелевская логика, математическая логика, неклассические логики

**Для цитирования:** Игошин В. И. Учить логике будущих учителей математики (часть III) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 202–207. <https://doi.org/10.18500/1819-7671-2022-22-2-202-207>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

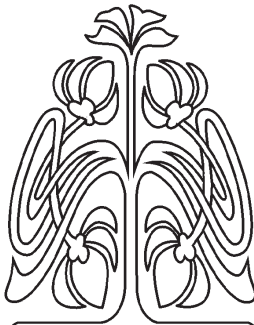
To teach logic to prospective mathematics teachers (Part III)

V. I. Igoshin

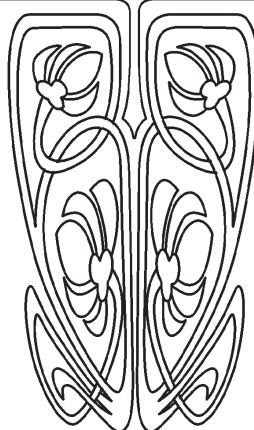
Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vladimir I. Igoshin, <https://orcid.org/0000-0003-0909-0009>, [igoshinvi@mail.ru](mailto:igoshinvi@mail.ru)

© Игошин В. И., 2022



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





**Abstract. Introduction.** The article is the third part of the author's article under the same title published in previous issues of this journal. It discusses the problem of forming the logical competencies of future mathematics teachers both at the undergraduate level and at the master's level. **Theoretical analysis.** In this case, logic is considered in three aspects – classical Aristotelian logic, modern mathematical logic and its application to Aristotelian logic, non-classical logics. This part of the article proposes a number of measures related to the formation of the logical and didactic training content for future mathematics teachers at the undergraduate and graduate levels in order to make this training a system-forming factor in the entire system of their training. At the same time, training at the master's level must meet the principle of continuity and become a natural continuation of training at the undergraduate level. **Conclusions.** Such an approach will significantly increase the level of the logical and general professional competence of mathematics teachers who graduate from pedagogical and classical universities. Such teachers will be able to apply logical knowledge and skills in their pedagogical activities to educate logically and mathematically competent students at different levels of general education capable of further self-development and creative activity.

**Keywords:** mathematics teacher, mathematics teacher training, logical competence of future mathematics teachers, bachelors and masters of pedagogical education, Aristotelian logic, mathematical logic, non-classical logicians

**For citation:** Igoshin V. I. To teach logic to prospective mathematics teachers (Part III). *Izvestiya of Saratov University. Philosophy. Psychology. Pedagogy*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 202–207 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1819-7671-2022-22-2-202-207>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

*Окончание. Начало см.: 2019. Т. 19, вып. 1. С. 113–117; 2020. Т. 20, вып. 1. С. 105–111*

### Введение

Двухуровневая система высшего образования (бакалавриат и магистратура) предоставляет большие возможности для подготовки высококвалифицированных учителей математики. Задача состоит в том, чтобы профессора и преподаватели совместно с администрацией вузов, которой теперь дано право самостоятельно разрабатывать учебные планы в соответствии с централизованными государственными образовательными стандартами, разработали для этого обучения такие учебные планы, которые действительно формировали бы необходимые профессиональные компетенции будущих учителей математики [1].

Чтобы максимально эффективно охватить все стороны подготовки высококомпетентного учителя математики, для составления таких скоординированных учебных планов администрации вуза и факультета целесообразно сформировать методическую комиссию из представителей кафедр, осуществляющих подготовку будущих учителей математики по направлению «Педагогическое образование».

### Логика для бакалавров педагогического образования

Будущие учителя математики с целью формирования у них необходимых логических компетенций должны освоить, во-первых, основы логики как науки (логическая подготовка, выстраивающая математические логические компетенции); во-вторых, научиться применять полученные логические знания в своей будущей профессионально-педагогической деятельности (логико-дидактическая подготовка, формиру-

ющая методические логические компетенции или логико-дидактические компетенции). Общее представление о содержании логических компетенций будущих учителей математики дано в разделе «Традиционная логика и математическая логика в обучении математике» предыдущей части.

Профессионально педагогически ориентированный курс математической логики, служащий основой логической компетентности будущего учителя математики, должен быть представлен двумя частями – для уровня бакалавриата и для уровня магистратуры со строгим соблюдением принципа преемственности. В свою очередь, для бакалавриата курс математической логики также может быть освоен на двух уровнях – общем и углубленном. Такой подход позволит основной массе будущих учителей освоить азы математической логики, а части их дойти до понимания результатов, полученных этой наукой, которые подготовят базу для их последующего обучения в магистратуре.

На общем, базовом, уровне (I–II курсы бакалавриата) студенты изучают и осваивают ключевые понятия и методы математической логики как науки. На этом этапе будущим учителям математики исключительно важно познакомиться с основными категориями классической аристотелевской логики – понятие, суждение, умозаключение, изучать их с использованием методов математической логики [2]. Фундаментом для изучения теоретического материала на этом уровне является один из учебников [3–5]. Основой для проведения практических занятий служит сборник задач [6], по которому преподаватель для каждого студента может сформировать индивидуальное задание для самостоятельной работы.



На III–IV курсах бакалавриата часть студентов, проявивших склонность и интерес к математической логике, когда она изучалась на базовом уровне, могут продолжить ее изучение. На этом этапе осуществляется подробное доказательство теорем, не вошедших в базовый курс. Затем могут быть рассмотрены формализованные исчисления высказываний и предикатов: подробное построение этих исчислений на базе системы аксиом и изучение метатеории исчисления.

#### **Логика для магистров педагогического образования**

Задача магистратуры в области математической логики состоит в том, чтобы продемонстрировать будущему учителю математики методологическую роль логики в системе всей математической науки. Он должен увидеть и осознать, как на протяжении многовековой истории развития математики, начиная с древнегреческих времен, происходило ее взаимодействие с логикой, усиливались требования к логической строгости математических определений и доказательств, наконец, как в XX в. аристотелевская логика, став математической логикой, смогла сформулировать и решить важнейшие философско-методологические проблемы, вставшие перед математической наукой и связанные с основаниями математики и обоснованием ее глобальной непротиворечивости.

Для достижения этих целей изучение будущими учителями математической логики на уровне магистратуры целесообразно начать с рассмотрения философских вопросов математики. В связи с обнаружением на рубеже XIX и XX вв. Г. Кантором, Б. Расселом и рядом других математиков парадоксов (антиномии) в теории множеств остро встали вопросы об основаниях всей математической науки, о ее непротиворечивости. Необходимо было доказать глобальную непротиворечивость математики и тем самым дать строго логическое обоснование всей математики как науки, как мощного инструмента познания окружающей действительности. Активные попытки устранения этих противоречий способствовали глубокому анализу оснований математики, который имел громадное значение для последующего ее развития. В процессе этого анализа сформировалось несколько подходов к обоснованию основ математической науки – логицизма, интуиционизма, формализма. Эти подходы исходили из понимания дуалистичности природы

человеческого мышления, на что указывал еще Декарт в своих «Правилах для руководства ума» в 1628 г.

Полученные логико-математические результаты оказались неожиданными. Они показали, что невозможно доказать непротиворечивость всей математики. Для понимания этих результатов изучение курса математической логики в магистратуре следует начать с понятия формальной аксиоматической теории, подробно рассмотреть свойства формализованного исчисления предикатов, примеры формальных аксиоматических теорий. Вершиной курса станут две теоремы Гёделя – о неполноте всякой формальной теории, содержащей формальную арифметику, и о недоказуемости непротиворечивости такой теории ее собственными методами, а также теоремы А. Тарского о невыразимости и недоказуемости истины в таких теориях.

Данные теоремы строгими математическими методами доказали ограниченность математики и ее аксиоматического метода и тем самым продемонстрировали невозможность реализации гильбертовской программы обоснования математики в полном ее объеме. Об этих теоремах образно выразился Г. Вейль: «Бог существует, поскольку математика, несомненно, непротиворечива, но существует и дьявол, поскольку доказать ее непротиворечивость мы не можем».

Без математизации традиционной аристотелевской логики, без математической логики обо всех этих достижениях не могло быть и речи. Специалисты по школьному математическому образованию активно обсуждали методические достоинства и недостатки использования концепции аксиоматического метода при обучении школьников математике [7, 8]. Каков бы ни был итог этой дискуссии, из нее со всей очевидностью вытекает по меньшей мере один вывод – сам учитель математики должен владеть концепцией аксиоматического метода во всей ее полноте и многогранности, которые обеспечивают ей методы математической логики. Достичь этого владения можно лишь при методически грамотно организованной двухуровневой системе обучения будущих учителей математики.

Более того, только при помощи математической логики было неопровержимо доказано, что не все задачи, решаемые математиком или логиком, могут быть решены машиной. Тем не менее именно математическая логика превратила традиционную аристотелевскую логику в



мощный метод для создания и функционирования компьютеров, без которых уже немыслима современная жизнь.

Все эти результаты, ставшие величайшими достижениями математики XX в., обладают поистине философской и методологической значимостью. Знания логико-философских оснований математической науки окажут глубокое влияние на педагогическое мировоззрение и практическую методику будущего учителя математики. Вооруженный ими, он сможет более эффективно развивать важнейшие качества мышления его учеников – логику, обучая методам доказательства уже открытых теорем, и интуицию, обучая приемам открытия неизвестных знаний, ибо в процессе познания и образования «логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства» [9, с. 167].

Прекрасным дополнением к изучению формализованных аксиоматических теорий может стать самостоятельное ознакомление студентов с компьютерными методами доказательства теорем как в исчислениях высказываний и предикатов, так и в различных разделах математики [10, 11].

Для характеристики и моделирования мыслительных процессов, происходящих в разнообразных сферах человеческой деятельности в XX в., были созданы многочисленные неаристотелевские (неклассические) логики – интуиционистская, конструктивная, деонтическая, нечеткая, модальная, многозначная, временная, алгоритмическая и др. Все они характеризуются тем, что в них высказывания не обязательно принимают одно из двух логических значений, как это имеет место в классической логике, и нередко не выполняется закон исключенного третьего. Знания об этих логиках существенно обогатят представления будущих учителей математики о современной логической науке.

Что касается формирования методических логических компетенций, т.е. осуществления логико-дидактической подготовки будущих учителей математики, то здесь ведущая роль принадлежит курсу методики обучения математике, который также должен быть тщательно со строгим соблюдением принципа преемственности разделен на две части – для уровня бакалавриата и для уровня магистратуры. В нем, в частности, необходимо рассмотреть множество конкретных примеров того, как логика помогает изучать математику [12–17].

## Выводы

Роль и значение логических средств и методов в педагогике давно осознаются и специалистами в области педагогики. Известный советский ученый-педагог Г. П. Щедровицкий ставил их даже выше по значению средств и методов психологических и социологических: «Уже на первых своих этапах методологические исследования показывают исключительно важное значение для системы педагогики логических проблем, знаний и методов. В частности, при определении содержания образования именно логический анализ оказывается исходным и решающим, а психологический, наоборот, зависимым и вторичным. Идет ли речь об анализе деятельности, которые должны совершать обученные и воспитанные индивиды, или же об анализе структуры учебных предметов, которые должны быть заданы учащимся, – всюду единственно “работающими” и эффективными на сегодня оказываются отнюдь не психологические или социологические и не специально-предметные (математические, физические, химические и т.п.), а лишь логические средства и методы» [18, с. 10–11].

Настоящая статья демонстрирует место, роль и значение логических средств и методов при обучении математике. Эти средства и методы должны освоить будущие учителя математики, которых готовят в настоящее время классические и педагогические университеты и институты. Целью их логической и логико-дидактической подготовки на уровнях бакалавриата и магистратуры является достижение ими высокого уровня логической культуры и логической компетентности, который позволит им видеть в преподаваемом математическом материале логическую составляющую, понимать ее значение для данного математического материала и уметь донести эту составляющую обучаемым с тем, чтобы эта логика помогла им осознать, глубже и адекватнее понять существо математики. Вместе с обучением математике будет происходить обучение и интеллектуальное развитие студентов *с помощью математики* – умение логически мыслить и рассуждать, необходимое во всех сферах человеческой деятельности.

## Список литературы

1. Игошин В. И. О качестве подготовки бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «Математическое образование» // Известия





Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 468–473. <https://doi.org/10.18500/1819-7671-2018-18-4-468-473>

2. Игошин В. И. Логика с элементами математической логики (лекции для студентов гуманитарных специальностей). Саратов : Научная книга, 2004. 144 с.
3. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений. М. : Академия, 2010. 448 с.
4. Игошин В. И. Математическая логика : учебное пособие. М. : ИНФРА-М, 2020. 399 с.
5. Игошин В. И. Элементы математической логики : учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования. М. : Академия, 2016, 2018, 2021. 320 с.
6. Игошин В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие. М. : КУРС: ИНФРА-М, 2017. 392 с.
7. Мантуров О. В., Исаева М. А. Об аксиоматическом методе в школьном курсе геометрии // Математика в школе. 1988. № 3. С. 38–41.
8. Глейзер Г., Калина А. О возможностях логического построения школьных курсов геометрии // Математика (газета). 2000. № 14. С. 1–4.
9. Пуанкаре А. О науке / пер. с фр. М. : Наука, 1983. 560 с.
10. Смирнов В. А., Маркин В. И., Новодворский А. Е., Смирнов А. В. Логика и компьютер : доказательство и его поиск : курс логики и компьютерный практикум. М. : Наука, 1996. 254 с.
11. Кранц С. Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить / пер. с англ. М. : Лаборатория знаний, 2016. 320 с.
12. Фетисов А. И. Элементы логики в преподавании математики // Известия АПН РСФСР. Вопросы общей методики математики. 1958. Вып. 92. С. 149–198.
13. Болтянский В. Г. Использование логической символики при работе с определениями // Математика в школе. 1973. № 5. С. 45–50.
14. Столяр А. А. О некоторых применениях логики в педагогике математики // Логика и проблемы обучения. М. : Педагогика, 1977. С. 125–139.
15. Тимофеева И. Л. Некоторые замечания о методе доказательства от противного // Математика в школе. 1994. № 3. С. 36–38.
16. Игошин В. И. О применении математической логики при доказательстве обратных теорем // Математика в школе. 2002. № 10. С. 26–28.
17. Игошин В. И. О точках и векторах в геометрии // Математическое образование. 2017. № 2 (82). Апрель – июнь. С. 27–43.
18. Щедровицкий Г., Розин В., Алексеев Н., Непомнящая Н. Педагогика и логика. М. : Касталь, 1993. 416 с.

## References

1. Igoshin V. I. About quality of teaching bachelors and post-graduated students of pedagogical education (mathematical education). *Izvestiya of Saratov University. Philosophy, Psychology, Pedagogy*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 468–473 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1819-7671-2018-18-4-468-473>
2. Igoshin V. I. *Logika s elementami matematicheskoy logiki* [Logic with Elements of Mathematical Logic]. Saratov, Nauchnaya kniga Publ., 2004. 144 p. (in Russian).
3. Igoshin V. I. *Matematicheskaya logika I teoriya algoritmov* [Mathematical Logic and Theory of Algorithms: Textbook for students higher educational institutions]. Moscow, Akademiya Publ., 2010. 448 p. (in Russian).
4. Igoshin V. I. *Matematicheskaya logika* [Mathematical Logic: Textbook]. Moscow, INFRA-M Publ., 2020. 399 p. (in Russian).
5. Igoshin V. I. *Elementy matematicheskoy logiki* [Elements of Mathematical Logic: Textbook for students institutions of secondary vocational education]. Moscow, Akademiya Publ., 2016, 2018, 2021. 320 p. (in Russian).
6. Igoshin V. I. *Sbornik zadach po matematicheskoy logike i terorii algoritmov* [Collection of Problems on Mathematical Logic and Theory of Algorithms: Textbook]. Moscow, KURS, INFRA-M Publ., 2017. 392 p. (in Russian).
7. Manturov O. V., Isaeva M. A. On axiomatic method in school geometry. *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 1988, no. 3, pp. 38–41 (in Russian).
8. Gleizer G., Kalina A. On possibilities of logical construction of school geometries. *Matematika (gazeta)* [Mathematics], 2000, no. 14, pp. 1–4 (in Russian).
9. Pouancare A. *O nauke* [About Science. Transl. from French]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 560 p. (in Russian).
10. Smirnov V. A., Markin V. I., Novodvorskiy A. E., Smirnov A. V. *Logika i kompyuyter: dokazatelstvo i ego poisk. Kurs logiki i kompyuyterniy praktikum* [Logic and Computer: Proof and Its Search. Logic Course and Computer Workshop]. Moscow, Nauka Publ., 1996. 254 p. (in Russian).
11. Krantz S. *Izmenchivaya priroda matematicheskogo dokazatelstva. Dokazat nelzya poverit* [The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. Transl. from Engl.]. Moscow, Laboratoriya znanii Publ., 2016. 320 p. (in Russian).
12. Fetisov A. I. Elements of logic in teaching mathematics. *Izvestiya APN RSFSR. Voprosi obschey metodiki matematiki* [Izvestiya APN RSFSR. Questions of General Methods of Mathematics], 1958, iss. 92, pp. 149–198 (in Russian).



13. Boltianskiy V. G. Logical symbolic in mathematical definitions. *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 1973, no. 5, pp. 45–50 (in Russian).
14. Stoliar A. A. On some applications of logic in mathematical education. In: *Logika i problemy obucheniya* [Logic and Education Problems]. Moscow, Pedagogika Publ., 1977, pp. 125–139 (in Russian).
15. Timofeeva I. L. Some notes about contradiction method proving. *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 1994, no. 3, pp. 36–38 (in Russian).
16. Igoshin V. I. On application of mathematical logic in converse theorems proving. *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 2002, no. 10, pp. 26–28 (in Russian).
17. Igoshin V. I. On points and vectors in geometry. *Matematicheskoe obrazovanie* [Mathematical Education Journal], 2017, no. 2 (82), April – June, pp. 27–43 (in Russian).
18. Shzhedrovickiy G., Rozin V., Alekseev N., Nepomnyashzhaya N. *Pedagogika i logika* [Pedagogic and Logic]. Moscow, Kastal' Publ., 1993. 416 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 30.01.2022; одобрена после рецензирования 10.02.2022; принята к публикации 25.03.2022  
The article was submitted 30.01.2022; approved after reviewing 10.02.2022; accepted for publication 25.03.2022