УДК 372.851

Учить логике будущих учителей математики (часть II)

В. И. Игошин

Игошин Владимир Иванович, доктор педагогических наук, профессор, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, igoshinvi@mail.ru

В статье обсуждается проблема формирования логических компетенций будущих учителей математики как на уровне бакалавриата, так и на уровне магистратуры. Логика рассматривается в трех аспектах – классическая аристотелевская логика, современная математическая логика и ее применение к аристотелевской логике, неклассические логики. Предлагается ряд мер, связанных с содержанием логической подготовки будущих учителей математики и направленных на совершенствование этой подготовки с целью повышения логической и общей профессиональной компетентности учителей математики, выпускаемых педагогическими и классическими университетами. Характеризуются знания, умения и навыки в области логики и методики преподавания математики, которыми необходимо овладеть будущему учителю математики с тем, чтобы наиболее успешно обучать этому предмету своих будущих учеников, прививать навыки логического мышления. Важнейшими из них являются понимание логического строения математических предложений (определений и теорем), сущности доказательства математической теоремы, строения математических теорий; владение методами доказательства математических теорем; умение применять логические знания в процессе обучения математике.

Ключевые слова: учитель математики, подготовка учителя математики, логическая компетентность будущих учителей математики, аристотелевская логика, математическая логика, неклассические логики.

DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2020-20-1-105-111

Продолжение.
Начало см.: 2019. Т. 19, вып. 1. С. 113–117.

Традиционная логика без математической логики

Впервые за круг идей и методов, очерченный Аристотелем, логику вывела теория индуктивных (или правдоподобных) умозаключений, в определенном смысле противоположных умозаключениям дедуктивным. Начало этой теории положено в трудах английских философов XVII–XVIII вв. Ф. Бэкона и Дж. Милля. Реальные рассуждения не исчерпываются только рассуждениями дедуктивными, при анализе которых математическая логика проявила себя блестяще. Традиционная логика пытается анализировать также и рассуждения, не относящиеся к дедуктивным. Математическая логика, т.е. математические методы в логике, здесь оказываются практически бессильными.

Правдоподобными называются умозаключения, в которых заключение B не следует с необходимостью из посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$, но посылки дают возможность считать заключение вероятным. В этом случае суждения $A_1, A_2, \dots, A_m$ используются не для осуществления дедуктивного вывода суждения B из посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$, а применяются как некая «подсказка», «намёк», «подводящий» (или «наводящий») нас на мысль о возможности принятия высказывания B. Переход от посылок к заключению носит не достоверный (как при дедукции), а лишь правдоподобный (проблематичный, вероятностный) характер. Посылки лишь подтверждают заключение B, делают истинность B более достоверной, более вероятной, нежели истинность B без наличия посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$.

К числу методов правдоподобных рассуждений (методов получения умозаключений) относятся метод полной индукции, метод неполной индукции, методы установления причинных связей (методы Бэкона – Милля), метод аналогии, гипотетико-дедуктивный метод, метод полной математической индукции. При этом первый и последний из перечисленных методов, являясь по своему характеру индуктивными (они от частных суждений приводят к общим), в то же время обладают важнейшим свойством дедуктивных умозаключений: от истинных посылок они непременно и всегда приводят к истинным заключениям.

Если дедуктивное умозаключение основано на анализе формальной структуры посылок и следствия умозаключения, то индуктивное умозаключение – на анализе их содержания. В индуктивном умозаключении мысль действительно развивается «от частного к общему», и основная функция индуктивных выводов в процессе познания – это генерализация знаний, т.е. получение все более общих суждений. Если посредством дедуктивных умозаключений некоторая мысль «выводится» из других мыслей, то индуктивные умозаключения лишь «наводят» на мысль. В связи с таким характером индуктивных умозаключений они обеспечивают получение при истинных посылках лишь правдоподобного заключения, которое может быть истинным лишь с той или иной степенью вероятности. При получении индуктивных умозаключений большую роль начинает играть интуиция; логика, игравшая первостепенную роль в дедуктивных умозаключениях, отступает на второй план. В этом, собственно, и состоит принципиальное отличие индуктивных умозаключений от дедуктивных: к первым не могут быть применены методы логического анализа формальной структуры посылок и следствия умозаключения и проверки правильности самого умозаключения.

Изучение методов правдоподобных рассуждений [1], с одной стороны, продемонстрирует будущему учителю математики, насколько более бедной и менее действенной становится логика после того, как она лишается возможности использовать математические методы по существу. С другой стороны, методы правдоподобных (индуктивных) рассуждений дадут в руки учителю инструмент, который он при творческом переосмыслении сможет использовать в процессе обучения учащихся поиску доказательств математических теорем; эти методы дадут основу для эвристических догадок в процессе такого поиска.

Традиционная логика и математическая логика в обучении математике

Как известно, научный поиск в математике осуществляется посредством диалектического взаимодействия двух сторон мыслительного процесса – интуиции и логики. Интуиция вскрывает факты, логика проверяет их на истинность. По точному выражению французского математика А. Пуанкаре (1854–1912), «логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства» [2, с. 167].

Более развернуто эту мысль высказал английский математик, логик и философ XX в. Б. Рассел (1872–1970): «Инстинкт, интуиция, или инсайт, – это то, что первоначально приводит к идеям, подтверждаемым или опровергаемым последующим рассуждением; однако подтверждение, если оно возможно, в конечном счете состоит в совместимости с другими идеями, которые имеют, в свою очередь, не менее интуитивный характер. Разум – это не творческая, а скорее гармонизирующая, контролирующая сила. Даже в самой что ни на есть чистой логической сфере именно инсайт добывает новое знание первым» [3, с. 45].

Раз в развитии математической науки огромную роль играют интуиция и логика, то и в процессе обучения математике эти два фактора человеческого мышления должны найти свое отражение.

Что касается интуиции, инсайта, озарения, то именно на этих явлениях основаны правдоподобные рассуждения, о которых говорилось выше. Обучение им будущих учителей математики – тема отдельного разговора. Знаменитые книги Д. Пойа [4–6], представляющие собой уникальные попытки рассказать широкому кругу читателей и, прежде всего, учителям математики, которые непременно должны их прочитать [4, с. 4], о том, как делаются открытия в математике и как этому обучать. Основной инструмент этих открытий – правдоподобные рассуждения. И Д. Пойа призывает: «*Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться*» [6, с. 11]. Отметим, что каждая математическая задача, если в ней не требуется лишь подставить конкретные данные в известную формулу, может служить инструментом для развития у учащихся интуитивного мышления.

Вернемся к мысли Б. Рассела о том, что идеи, порожденные интуицией, подтверждаются или опровергаются последующим рассуждением, а подтверждение идеи состоит в ее совместимости с другими идеями. Вот это-то подтверждение совместимости одной идеи с другими идеями осуществляется с помощью логических рассуждений, а сама совместимость (или несовместимость) состоит в том, следует (или не следует) логически новая идея из уже доказанных идей, т. е. состоит в поиске логически строгого доказательства новой идеи из ранее доказанных.

Если, как говорил Г. Галилей, книга природы написана на языке математики, то языком самой математики, несомненно, является логика. В свою очередь, и логика обладает своим математическим языком: это – язык математической логики и этим языком учитель математики обязан владеть в совершенстве.

Вооруженный знанием логики, т.е. логически грамотный, логически компетентный учитель математики умеет логически грамотно анализировать логическую структуру математических предложений – определений, аксиом, теорем, отчетливо видит, где и какие логические связки участвуют в формулировке (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность), может различать утверждения всеобщности («для всех») и существования («существует»). Он способен логически грамотно давать определения математических понятий, осознавая их тип – через ближайший род и видовое отличие, индуктивное, рекуррентное, генетическое или аксиоматическое. Если речь идет о теореме, то необходимо четко уяснить, что в ней дано и что требуется доказать, каковы логические структура условий и структура заключения. Важно также понимание сути необходимых и достаточных условий, прямой и обратной теорем и их различных видов. Кроме того, необходимо научиться определять, какие предложения равносильны каким, т.е. научиться преобразовывать структуру математического предложения равносильным способом. И здесь помогает математическая логика, с помощью которой эти преобразования предстают наиболее зримо. В частности, важно уметь строить отрицания математических предложений с использованием законов де Моргана в бескванторной и кванторной формах. Чем больше усвоено логических равносильностей, тем выше логическая культура учителя. Существенную помощь в анализе логической структуры математических предложений и ее преобразовании окажет запись предложений на языке математической логики – алгебры высказываний или логики предикатов.

На этом этапе педагогической деятельности учитель математики выступает в роли лингвиста. Математический текст (формулировки определений, аксиом, теорем, постановки учебных задач и проблем) представляет собой уникальный сплав языка и математики. Его задача – адекватно выразить математическую мысль. Изучение определений, теорем и их доказательств, решение всякой математической задачи по существу начинается с логико-лингвистического анализа соответствующего текста. Для создания таких текстов и адекватного их понимания, совмещения традиций и законов обыденного и математического языков, анализа математического текста на предмет выявления в нем математической мысли необходимо знание основ математической логики. Важным компонентом этого умения является умение переводить математическое предложение с обычного языка на логико-математический (символический) и наоборот. Такой перевод помогает понять смысл предложения и избежать двусмысленности. Другими словами, учитель должен владеть умением распознавать логическую структуру предложения и словесно переформулировать его в виде, от которого легко можно перейти к символической записи на языке математической логики (это своего рода умение математически грамотной постановки прикладной практической задачи) [7]. Отметим, что владение логико-лингвистическим анализом языкового текста важно не только для учителя математики, но и в других научных и учебных областях [8].

Логически грамотный, компетентный учитель математики отчетливо осознает понятие доказательства математической теоремы. Многие теоремы в математике имеют логическую структуру $A \rightarrow B$ («*Если A, то B*»). Ее доказательство – это последовательность (цепочка) утверждений $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, каждое из которых есть либо условие теоремы, либо аксиома, либо получено из двух предыдущих утверждений последовательности по одному из логических правил вывода, важнейшим из которых является правило вывода, называемое Modus Ponens (утверждающий модус): из утверждений A и $A \rightarrow B$ следует утверждение B. Построив такую цепочку, мы доказываем, что из A выводится B, в результате чего делаем вывод, что справедлива теорема $A \rightarrow B$. Обоснованием этому переходу служит логическая теорема о дедукции, доказываемая в математической логике. Всякий раз при доказательстве теоремы необходимо стремиться к тому, чтобы цепочка последовательных утверждений вырисовывалась в сознании учащегося как можно отчетливо.

Математическая логика, оттолкнувшись от интуитивных представлений о содержательном доказательстве, восходящих к временам древнегреческой математики, в XX в. выработала понятие формального доказательства, которое явилось логико-математической моделью интуитивного понятия доказательства. Это понятие представляет собой логическую формализацию, своего рода логическую модель процесса доказательства в конкретно-содержательных математических теориях. Именно так устроены доказательства в математике, как в высшей, так и в школьной. Чрезвычайно важно наглядно и доступно продемонстрировать это будущему учителю математики и убедить его в этом.

В курсе математической логики есть два раздела, посвященных так называемым формализованным исчислениям высказываний и предикатов. В этих разделах понятие доказательства предстает в схематическом формальном виде [9, 10]. Освоив эти разделы, будущие учителя математики смогут более осознанно подойти к доказательствам и методике их обучения в школьном курсе математики.

Логически компетентный учитель математики владеет логическими методами доказательства математических теорем. Логические методы не следует путать с математическими методами доказательства математических теорем. Последние применимы при доказательстве теорем в конкретных разделах математики с использованием понятий именно этого раздела. Логические методы носят общематематический характер и применимы во всех разделах математики. В этом, собственно, и состоит объединяющее начало логики для математики, делающее математику при всем богатстве и разнообразии ее разделов единой наукой.

В первую очередь необходимо освоить методы построения цепочки утверждений $A = A_0,\ A_1, \dots, A_n = B$ для доказательства теоремы $A \to B$ («*Если A, то B*»). Синтетический (или прямой) метод – построение цепочки в прямом направлении, т.е. от A к B. Аналитический метод (или метод восходящего анализа) – построение цепочки в обратном направлении, т.е. от B к A. Далее следует уяснить, что, например, для доказательства теоремы $A \to B$ достаточно доказать теорему $\neg B \to \neg A$, или $(A \wedge \neg B) \to \neg A$, или $(A \wedge \neg B) \to B$ (варианты метода доказательства от противного), вместо теоремы A достаточно доказать теорему $(\neg A \to (B \wedge \neg B)) \to A$ (метод приведения к абсурду), а вместо теоремы $A \to C$ – две теоремы $A \to B$ и $B \to C$ (метод цепного заключения) и т.д.

Наконец, логически грамотный и компетентный учитель математики понимает, как возникают математические теории и каково их аксиоматическое устройство. Здесь имеется в виду уяснение сути аксиоматического метода при построении математической теории и при ее преподавании, а также уяснение сути первоначальных (неопределяемых) понятий теории, ее аксиом и теорем; владение методами анализа и изучения логических свойств аксиоматических математических теорий (метатеории) – непротиворечивости, полноты, категоричности, независимости системы аксиом.

На этом этапе логической подготовки будущих учителей математики курс математической логики как бы выходит за свои собственные пределы и должен получить свое естественное продолжение во всех математических курсах педагогического вуза. В каждом из этих курсов с позиций математической логики должны быть рассмотрены соответствующие аксиоматические теории, лежащие в основании соответствующей математической дисциплины. Эти математические основания естественным образом будут переходить в основания соответствующей школьной учебной математической дисциплины. Так, аксиоматическая теория числовых систем служит основанием школьного курса алгебры и начал анализа, а аксиоматические построения геометрии на базе систем аксиом Гильберта и Вейля – основаниями школьного курса геометрии.

Здесь снова на помощь приходит курс математической логики и два его раздела – формализованные исчисления высказываний и предикатов. Они представляют собой уникальные примеры формальных аксиоматических теорий, на которых будущему учителю математики могут быть подробно и со всеми доказательствами продемонстрированы как процесс построения данной теории, так и процесс исследования ее свойств (метатеория такой теории). Подобными методическими возможностями не обладает ни курс геометрии, ни даже курс числовых систем [11, 12].

Все перечисленные знания, умения и навыки составляют существо логической компетентности будущего учителя математики. Умение применять их в процессе обучения математике есть его логико-дидактическая компетентность. Владея ею, будущий учитель сможет каждодневно на практике решать важную методическую проблему, состоящую в том, чтобы всякий раз при изложении нового материала, при его закреплении или решении задач определять, какие элементы логики следует освоить по ходу изучения школьного курса математики; в каком месте этого курса и в связи с каким конкретным материалом необходимо их изучать; в каком аспекте и на каком уровне следует преподносить учащимся эти элементы. Решение данной методической задачи в значительной мере зависит от логически компетентного учителя, который и должен дать ответ применительно к тому конкретному классу, к тому контингенту учащихся, с которым он работает. «Опыт показывает, – отмечают В. А. Вышенский и Л. А. Калужнин, – что именно для школьников со средними способностями к математике польза от логических понятий и символики особенно существенна. Ученики с математическим талантом, как хорошо известно, чисто интуитивно и самостоятельно в конце концов осваивают логическую структуру математики, но и им приведенные логические схемы могут облегчить путь в математику» [13, с. 40]. Другой известный советский математик-педагог А. А. Столяр также подчеркивал исключительность экспериментально установленного факта: «Обучение математике традиционными методами, пренебрегающими логикой, не достигает существенного логического развития» [14, с. 188].

Заострял внимание на проблеме обучения школьников логике на уроках математики и великий математик XX в. академик АН СССР А. Н. Колмогоров (1903–1987). Обращаясь к учителям математики, он говорил, что «формализация математики не избавляет нас от необходимости рассуждать содержательно с целью получения *истины* в самом обычном общечеловеческом смысле этого слова. В таких рассуждениях мы применяем обычную *содержательную логику.* Ответственность преподавателей математики здесь особенно велика, так как отдельного предмета "логика" в школе нет, и знакомство с началами логики практически в значительной мере происходит на уроках математики. При этом нет никаких оснований бояться широкого введения в школе символических обозначений и формул математической логики, записывая, например, правило силлогизма в виде $A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C$ или схему доказательства "от противного" в виде $(\neg B \to \neg A) \Leftrightarrow (A \to B)$. Здесь речь идет о символической записи законов обычной общечеловеческой логики» [15, с. 236].

В заключение этой части статьи вспомним еще одного выдающегося математика и педагога члена-корреспондента АН СССР А. Я. Хинчина, который, кстати, во второй половине 30-х гг. XX в. работал в Саратовском университете. Он выделял одно из важнейших профессиональных качеств математика-педагога – математический стиль мышления, охарактеризовав его следующими особенностями: 1) доведенное до предела доминирование логической схемы рассуждения; 2) лаконизм, сознательное стремление всегда находить кратчайший из ведущих к данной цели логический путь; 3) четкая разбивка хода рассуждений на случаи и подслучаи; 4) скрупулезная точность символики. Математический стиль мышления, в свою очередь, предъявляет высокие требования к логической строгости и стройности умозаключений и рассуждений, воспитывает общую логическую культуру мышления, способствует развитию потребности в полноценности аргументации и чувства такой полноценности. Именно, «изучая математику, – считал А. Я. Хинчин, – школьник впервые в своей жизни встречает столь высокую требовательность к полноценности аргументации» [16, с. 36].

Задача будущего учителя математики – перед лицом своих учеников оказаться на высоте всех этих жестких требований логики и в своей будущей педагогической деятельности суметь раскрыть перед ними непреходящую красоту и силу математической науки, научить их с помощью математики логически грамотно и ясно мыслить и рассуждать, помня слова Л. Н. Толстого о том, что «математика имеет задачей не обучение исчислению, но обучение приемам человеческой мысли при исчислении».

К сожалению, современные государственные образовательные стандарты, претерпевающие процедуры реформирования на протяжении последней четверти века, разрушив старую систему подготовки учителей математики в педагогических институтах, пока так и не нацелились на подготовку в современных классических и педагогических университетах логически грамотных и компетентных учителей математики [17].

Окончание следует

Список литературы

1. *Игошин В. И.* Логика с элементами математической логики : лекции для студентов гуманитарных специальностей. Саратов : Научная книга, 2004. 144 с.
2. *Пуанкаре А.* О науке / пер. с фр. М. : Наука, 1983. 560 с.
3. *Рассел Б.* Мистицизм и логика // Рассел Б. Почему я не христианин : Избранные атеистические произведения / пер. с англ. М. : Политиздат, 1987. С. 37–60.
4. *Пойа Д.* Как решать задачу ? / пер. с англ. М. : Учпедгиз, 1961. 208 с.
5. *Пойа Д.* Математическое открытие / пер. с англ. М. : Наука, 1970. 452 с.
6. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / пер. с англ. М. : Наука, 1975. 464 с.
7. *Крейдлин Г. Е., Шмелев А. Д.* Языковая деятельность и решение задач // Математика в школе. 1989. № 3. С. 39–45.
8. *Железовская Г. И., Гудкова Е. Н.* Язык современной педагогики : логико-лингвистический анализ // Образование. Наука. Инновации : Южное измерение. 2012. № 6 (26). С. 19–28.
9. *Игошин В. И.* О понятии доказательства математических теорем // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России : материалы международного форума по математическому образованию, посвященные 225-летию Н. И. Лобачевского (XXXVI Междунар. науч. семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов) / отв. ред. Л. Р. Шакирова. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2017. Т. 2. С. 83–88.
10. *Тимофеева И. Л.* Как устроено доказательство? // Математика в школе. 2004. № 8. С. 73–80.
11. *Игошин В. И.* Курс числовых систем в формате двухуровневой подготовки учителей математики // Образование и наука. 2017. Т. 19, № 1. С. 81–102. DOI: 10.17853/1994-5639-2017-1-81-102

12. *Igoshin Vladimir*. On the Equivalence of Two Systems of Axioms for Propositional Calculus // Modern Problems of Mathematics and Mechanics. Proceedings of the International Conference Devoted to the 80th Anniversary of Academician Akif Gadjiev / Chairmen prof. M. C. Mardanov. Baki, Azerbaijan, 6–8 dekabr 2017. P. 95–97.
13. *Вышенский В. А., Калужнин Л. А.* О месте теории множеств и математической логики в школьном курсе математики // Математика в школе. 1970. № 1. С. 35–40.
14. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск : Вышэшая школа, 1974. 384 с.
15. *Колмогоров А. Н.* Математика – наука и профессия. М. : Наука, 1988. 288 с.
16. *Хинчин А. Я.* Математика как профессия (О воспитательном эффекте математического образования) : сб. ст. М. : Знание, 1980. 64 с.
17. *Игошин В. И.* О качестве подготовки бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «Математическое образование» // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 468–473. DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2018-18-4-468-473

Образец для цитирования:

Игошин В. И. Учить логике будущих учителей математики (часть II) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 105–111. DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2020-20-1-105-111

To Teach Logic to Prospective Mathematics Teachers (part II)

V. I. Igoshin

Vladimir I. Igoshin, https://orcid.org/0000-0003-0909-0009, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, igoshinvi@mail.ru

The article is the second part of the author’s article under the same title, published in the previous issue of this journal. The article discusses the problem of formation of logical competences of future teachers of mathematics both at the level of bachelor’s degree and at the level of master’s degree. In the article, logic is considered in three aspects – classical Aristotelian logic, modern mathematical logic and its application to Aristotelian logic and non-classical logics. A number of measures related to the content of logical training of prospective teachers of mathematics and aimed at improving this training in order to develop the logical and general professional competence of teachers of mathematics produced by pedagogical and classical universities are proposed. The article characterizes the knowledge and skills in the field of logic and mathematics teaching methods, which are necessary for future math teachers to teach mathematics to their future students most effectively and develop in them logical thinking skills. The most important skills are understanding the logical structure of mathematical propositions (definitions and theorems), understanding the essence of proving mathematical theorems, knowing methods of proving them, understanding the structure of mathematical theories, and the ability to apply logical knowledge in teaching mathematics.

Keywords: teacher of mathematics, mathematics teacher training, logical competence of prospective mathematics, Aristotle logic, mathematical logic, non-classical logics.

References

1. Igoshin V. I. *Logika s elementami matematicheskoy logiki* [Logic with Elements of Mathematical Logic]. Saratov, Nauchnaya kniga Publ., 2004. 144 p. (in Russian).
2. Pouancare A. *O nauke* [About Science]. Transl. from Frans. Moscow, Nauka Publ., 1983. 560 p. (in Russian).
3. Russell B. Misticizm i logika [Mysticism and Logic]. In: B. Russell. *Pochemu ya ne khristianin* [Why I am not Christian]. Transl. from Engl. Moscow, Politizdat Publ., 1987. 334 p. (in Russian).
4. Polya D. *Kak reshat zadachu?* [How to Solve Problem?]. Transl. from Engl. Moscow, Uchpeggiz Publ., 1961. 208 p. (in Russian).
5. Polya D. *Matematicheskoe otkrytie* [Mathematical Discovery]. Transl. from Engl. Moscow, Nauka Publ., 1970. 452 p. (in Russian).
6. Polya D. *Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya* [Mathematics and Plausible Reasoning]. Transl. from Engl. Moscow, Nauka Publ., 1975. 464 p. (in Russian).
7. Kreidlin G. E., Shmelev A. D. Language activities and problem solving. *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 1989, no. 3, p. 39–45 (in Russian).
8. Zhelezovskaya G. I., Gudkova E. N. Language of Modern Pedagogy: Logic-Linguistic Analysis. *Obrazovanie. Nauka. Innovacii: Yuzhnoe izmerenie* [Education. Science. Innovations: South Dimention], 2012, no. 6 (26), pp. 19–28 (in Russian).
9. Igoshin V. I. On the notion of mathematical theorems proof. *N. I. Lobachevskiy i matematicheskoe obrazovaniye v Rossii: Materialy mezhdunarodnogo foruma po matematicheskomu obrazovaniyu, posviaschennogo 225-letiyu N. I. Lobachevskogo* [N. I. Lobachevskiy and Mathematical Education in Russia]. Ans. ed. L. R. Shakirova. Kazan, Izdatel’stvo Kazanskogo universiteta, 2017, vol. 2, pp. 83–88 (in Russian).
10. Timofeeva I. L. What is Proof Construction? *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 2004, no. 8, pp. 73–80 (in Russian).
11. Igoshin V. I. Subject “Number Systems” for Two-Level Training of Mathematics Teachers. *Obrazovanie i nauka* [Education and Science Journal], 2017, vol. 19, no. 1, pp. 81–102 (in Russian). DOI: 10.17853/1994-5639-2017-1-81-102

12. Igoshin Vladimir. On the Equivalence of Two Systems of Axioms for Propositional Calculus. *Modern Problems of Mathematics and Mechanics. Proceedings of the International Conference Devoted to the 80-th Anniversary of Academician Akif Gadjiev*. Chairmen prof. M. C. Mardanov. Baki, Azerbaijan, 6–8 dekabr 2017, pp. 95–97.
13. Vyshenskii V. A., Kaluzhnin L. A. On the Place of Mathematical Logic in School Mathematics. *Matematika v shkole* [Mathematics in School], 1970, no. 1, pp. 35–40 (in Russian).
14. Stoliar A. A. *Pedagogika matematiki* [Pedagogic of Mathematics]. Minsk, Vyseshaya shkola Publ., 1974. 384 p. (in Russian).
15. Kolmogorov A. N. *Matematika – nauka i professiya* [Mathematics is Science and Profession]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 288 p. (in Russian).
16. Khinchin A. Ya. *Matematika kak professiya* (*O vospitatelnom effekte matematicheskogo obrazovaniya*: *sbornik statei*) [Mathematics as Profession (On the Educational Effect of Mathematical Education). Collection of articles]. Moscow, Znanie Publ., 1980. 64 p. (in Russian).
17. Igoshin V. I. On the Quality of Training Bachelors and Post-Graduated Students of Pedagogical Education "Mathematical Education". *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Philosophy, Psychology, Pedagogy*, 2018, vol. 18, iss. 4. pp. 468–473 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2018-18-4-468-473

Cite this article as:

Igoshin V. I. To Teach Logic to Prospective Mathematics Teachers (part II). *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Philosophy. Psychology. Pedagogy,* 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 105–111. DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2020-20-1-105-111